



گزینه ۴

۱

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2} \Rightarrow 2x^2 \leq -x + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 3 \leq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq 1$$

گزینه ۳

۲

$$3^{x-1} \times \left(\frac{1}{9}\right)^x = \sqrt{27} \Rightarrow 3^{x-1} \times (3^{-2})^x = 3 \times 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 3^{x-1} \times 3^{-2x} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 3^{(x-1)+(-2x)} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow x - 1 - 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow -x = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

گزینه ۴

۳

داریم:

$$f(a) = 2^a = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^a = \frac{1}{2^2} \Rightarrow a = -2 \quad (1)$$

$$f(b+a) = 2^{b+a} = 1 \Rightarrow 2^{b+a} = 2^0 \Rightarrow b+a = 0 \xrightarrow{(1)} b = 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} ab = (-2)(2) = -4$$

گزینه ۲

۴

دو نقطه مورد نظر با طول‌های ۲ و ۴ است یعنی نقاط  $A(2, 4)$  و  $B(4, 16)$  است:

$$|AB| = \sqrt{(4-2)^2 + (16-4)^2} = \sqrt{148} = \sqrt{4 \times 37} = 2\sqrt{37}$$

$$\frac{27^x - 27}{3^x - 3} = \frac{(3^x - 3)((3^x)^2 + 3 \times 3^x + 9)}{3^x - 3} \stackrel{x \neq 1}{=} (3^x)^2 + 3 \times 3^x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 9 = (3^x + \frac{3}{2})^2 + \frac{27}{4} \quad (*)$$

$$3^x > 0 \Rightarrow 3^x + \frac{3}{2} > \frac{3}{2} \Rightarrow (3^x + \frac{3}{2})^2 > \frac{9}{4} \Rightarrow (3^x + \frac{3}{2})^2 + \frac{27}{4} > \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = 9$$

توجه کنید که باید مقدار (\*) را به ازای  $x = 1$  از برد تابع حذف کنیم:

$$x = 1 \Rightarrow (*) = 27 \Rightarrow (y > 9) - \{27\}$$

$$0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x - [x]} < 1$$

$$\Rightarrow 3^0 \leq 3^{\sqrt{x - [x]}} < 3^1 \Rightarrow 1 \leq \underbrace{3^{\sqrt{x - [x]}}}_y < 3 \Rightarrow 1 \leq y < 3$$

بنابراین برد تابع برابر  $(1, 3)$  است که شامل اعداد صحیح ۱ و ۲ می‌باشد.

نکته: هر تابع به صورت  $y = k^x$  را که در آن  $k$  عددی حقیقی، مثبت و مخالف یک باشد تابع نمایی می‌گویند.  
بنابراین:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 2 \Rightarrow a < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a} - 2 \neq 1 \Rightarrow \frac{1}{a} \neq 3 \Rightarrow a \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین باتوجه به اینکه:

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

نکته: هر تابع به صورت  $y = k^x$  را که در آن  $k$  عددی حقیقی، مثبت و مخالف یک باشد تابع نمایی می‌گویند.  
بنابراین:

$$\begin{cases} 1 - 2b > 0 \Rightarrow -2b > -1 \Rightarrow b < \frac{1}{2} \\ 1 - 2b \neq 1 \Rightarrow -2b \neq 0 \Rightarrow b \neq 0 \end{cases}$$

بنابراین باتوجه به اینکه  $\frac{1}{4}$  از  $\frac{1}{2}$  کوچک‌تر است، پس  $b = \frac{1}{4}$  می‌تواند باشد.

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \xrightarrow{x=1, y=b} b = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^1 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \xrightarrow{x=b-1, y=\frac{a}{\sqrt{2}}} \frac{a}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{b-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}b = \lambda + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 9$$

اعداد ۳ و ۴ و ۵ اعداد فیثاغورسی هستند یعنی در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند بنابراین:

$$x^{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow x^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$